

2. Имеем одномерную САУ, описываемую системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = \overline{1, (n-1)}, \\ \dot{x}_n = \sum_{j=1}^n a_j x_j + Bu, & u \in R^1. \end{cases}$$

Т.к. u нет в первых $(n-1)$ уравнениях, то желаемую динамику можно задать только для n -го уравнения, в которое входит u в виде

$$F(x, v) = \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = \overline{1, (n-1)}, \\ \dot{x}_n = F_n(x, v). \end{cases}$$

Координаты x_1, \dots, x_{n-1} будут изменяться в соответствии с изменениями координаты x_n .

Модальный метод синтеза

Данный метод относится к методам синтеза многомерных и одномерных систем с использованием их модальных характеристик (собственные числа или корни характеристического уравнения, собственные вектора).

Постановка задачи

1. Имеется модель объекта в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \quad (1)$$

2. Заданы требования к замкнутой системе в виде желаемого расположения корней.

$$\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\},$$

которые определяются по требованиям, предъявляемым к САУ:

$$t_p \leq t_{p.зад.} \quad - \text{ время регулирования;}$$

$$\mu \leq \mu_{зад.} \quad - \text{ колебательность;}$$

$$\sigma\% \leq \sigma_{зад.}\% \quad - \text{ перерегулирование.}$$

По ним вычисляется сектор (рис.111)

$$t_p \approx \frac{3}{r}, \quad r \approx \frac{3}{t_p}, \quad \mu = \max_i \left| \frac{\omega_i}{\alpha_i} \right|, \quad r = \min_i |\alpha_i|.$$

В данном заштрихованном секторе корни выбираются произвольно, тогда ПП в системе будут удовлетворять заданным требованиям.

На практике корни необходимо выбирать ближе друг к другу и к границе сектора. При этом упрощается структура регулятора.

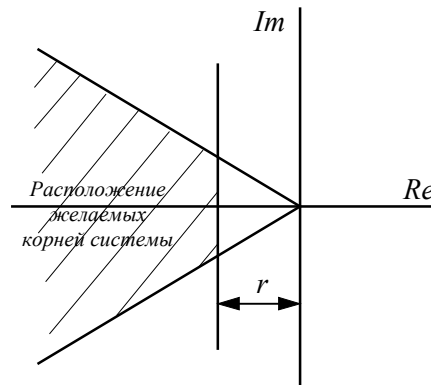


Рис.111

Управляющее воздействие системы формируется в виде отрицательной обратной связи

$$u = k(x - v), \quad (2)$$

где v – вектор входных воздействий на систему, $v \in R^m$;

k – матрица коэффициентов усиления, значения которой необходимо найти в процессе синтеза

$$\dim k = n \times m.$$

Подставим (2) при $v = 0$ в (1), получим

$$\dot{x} = Ax + Bkx = (A + Bk)x. \quad (3)$$

Характеристическое уравнение (3) будет:

$$\det[\lambda I - A - Bk] = 0. \quad (4)$$

Решая (4) определяем совокупность корней замкнутой САУ – $\Lambda(k)$. Так как матрицы A и B постоянны и известны, то корни являются функциями элементов матрицы k .

Приравняем

$$\Lambda(k) = \Lambda^* - \text{желаемым} \quad (5)$$

и из (5) определяем матрицу k .

Соотношение (5) лежит в основе модального метода синтеза.

Трудности из линейной алгебры:

1. Т.к. $\dim k = n \times m$, а уравнений (5) равно n , то $nm - n = n(m - 1)$ – величинам k необходимо придать произвольные значения, а остальные n величин k определяются из уравнений (5);

2. Обычно $\Lambda(k)$ – сложная нелинейная зависимость, что затрудняет непосредственное определение матрицы k по основному соотношению (5);

3. Аналитически определить корни замкнутой системы $\Lambda(k)$ можно лишь для $n \leq 5$.

Поэтому практически при синтезе основное соотношение (5) не используется. От корней переходят к коэффициентам характеристического уравнения (4), т.к. между ними существует взаимно-однозначное соответствие. Тогда процедура расчета будет следующая.

Известно:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ u = kx, \quad \text{при } v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задаемся из показателей качества желаемыми корнями

$$\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}. \quad (2)$$

Требуется определить матрицу $k = ?$ $\dim k = n \times m$.

Определяется характеристическое уравнение САУ:

$$\det[\lambda I - A - Bk] = \lambda^n + C_n(k)\lambda^{n-1} + C_{n-1}(k)\lambda^{n-2} + \dots + C_2(k)\lambda + C_1(k) = 0. \quad (3)$$

По заданным показателям качества ПП определяется желаемое характеристическое уравнение

$$\lambda^n + C_n^*\lambda^{n-1} + C_{n-1}^*\lambda^{n-2} + \dots + C_2^*\lambda + C_1^* = 0. \quad (4)$$

Далее приравняем коэффициенты (3) и (4) при одинаковых степенях λ , т.е.

$$C_i^* = C_i(k), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Соотношение (5) является основным расчетным соотношением для систем любого порядка.

Снова имеем $n \times m$ – неизвестных составляющих матрицы k и n уравнений (5), следовательно $n(m - 1)$ - значений k задаются произвольно, а остальные вычисляются из уравнений. Т.е. вычисление по соотношению (5) свойственны те же сложности, о которых ранее было сказано для корней.

Поэтому для упрощения процедуры синтеза используют преобразование координат, которое позволяет получить каноническую форму уравнений состояния объекта.

Каноническая форма – это такие уравнения объекта, которые имеют минимальное число ненулевых элементов.

Преобразование от произвольной формы к канонической называют каноническим преобразованием.

Канонические преобразования

Рассмотрим канонические преобразования на примере скалярного объекта:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^1.$$

Первая каноническая форма

Утверждение: Если объект управляем, то существует такое невырожденное преобразование координат $\tilde{x} = T_1 x$, $\det T_1 \neq 0$, что уравнение объекта может быть представлено в виде 1-й канонической формы:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u,$$

$$\text{где } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda & -a_1 \\ & [I]_{n-1} & \Lambda \\ & & -a_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

I – единичная диагональная матрица, размерности $(n-1)$.

Матрица \tilde{B} имеет один коэффициент $\neq 0$, все остальные элементы = 0.

a_i ($i = \overline{1, n}$) – коэффициенты характеристического уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$, представленного в виде

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda + a_1 = 0.$$

В качестве матрицы T_1 выбирается матрица

$$T_1 = P^{-1} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}^{-1}.$$

Пример:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0 \quad \text{– характеристическое уравнение объекта.}$$

Составим матрицу управляемости:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда}$$

$$T_1 = P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix},$$

т.к. $\det P = 18 - 1 = 17$

$\tilde{x} = T_1 x \Rightarrow x = T_1^{-1} \tilde{x}$, подставляя в исходное уравнение:

$$T_1^{-1} \dot{\tilde{x}} = AT_1^{-1} \tilde{x} + Bu \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \underbrace{T_1^{-1} A T_1}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{T_1^{-1} B}_{\tilde{B}} u \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u,$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{119}{17} \\ 1 & \frac{102}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вторая каноническая форма

Утверждение: Если объект управляем, то существует такое невырожденное преобразование координат $\tilde{x} = T_2 x$, $\det T_2 \neq 0$, что уравнение объекта может быть представлено в виде 2-й канонической формы

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & & [I]_{n-1} & \\ \Lambda & & & \\ -a_1 & -a_2 & \Lambda & -a_n \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 1 \end{bmatrix} u$$

где a_i – коэффициенты характеристического уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$, представленного в виде

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda + a_1 = 0.$$

В качестве матрицы T_2 используется матрица преобразования вида

$$T_2 = M^{-1} P^{-1}$$

где M – вспомогательная матрица, составленная из коэффициентов характеристического уравнения объекта, матрица M – треугольная и имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \Lambda & a_n & 1 \\ a_3 & & \Lambda & 1 & 0 \\ M & M & & M & M \\ a_n & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим предыдущий численный пример:

Пример:

$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$ – характеристическое уравнение

Составим матрицу M :

$$M = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу M^{-1} :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix},$$

т.к. $\det M = -1$, то $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$,

$$\tilde{x} = T_2 x \Rightarrow x = T_2^{-1} \tilde{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \underbrace{T_2^{-1} A T_2^{-1}}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{T_2^{-1} B}_{\tilde{B}} u,$$

$$T_2 = M^{-1} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 11 \end{bmatrix},$$

$$T_2^{-1} = (M^{-1} P^{-1})^{-1} = P M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{119}{17} & \frac{102}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Исходная САУ описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ u = kx + Dv, \end{cases} \quad (u, y, v) \in R^1, \quad x \in R^n. \quad (1)$$

Матрицы A, B, C любого вида. $k = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ – коэффициент усиления регулятора.

Для системы (1) необходимо определить параметры регулятора, обеспечивающего в замкнутой системе желаемое распределение корней $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$, которые соответствуют желаемому характеристическому уравнению:

$$\lambda^n + C_n \lambda^{n-1} + C_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + K + C_2 \lambda + C_1 = 0. \quad (2)$$

От произвольного описания объекта (1) перейдем, с помощью невырожденного преобразования T_2 ко второй канонической форме: $\tilde{x} = T_2 x$, $\det T_2 \neq 0$.

Тогда

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u, \quad (3)$$

где
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \Lambda & & [I]_{n-1} & \\ -a_1 & -a_2 & \Lambda & -a_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если $v = 0$, то $u = kx \Rightarrow u = kT_2^{-1} \tilde{x}$, обозначим

$$\tilde{k} = kT_2^{-1}, \quad \tilde{k} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n].$$

Подставим u в (3)

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{k}) \tilde{x}. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение (4)

$$\det(\lambda I - \tilde{A} - \tilde{B} \tilde{k}) = 0,$$

$$\lambda^n + (\tilde{a}_n - \tilde{k}_n) \lambda^{n-1} + (\tilde{a}_{n-1} - \tilde{k}_{n-1}) \lambda^{n-2} + \dots + K + (\tilde{a}_2 - \tilde{k}_2) \lambda + (\tilde{a}_1 - \tilde{k}_1) = 0. \quad (5)$$

Приравнявая между собой коэффициенты (5) и желаемого характеристического уравнения при одинаковых степенях λ , получим

$$C_i = \tilde{a}_i - \tilde{k}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Как видно из (6) при определении коэффициентов регулятора для канонической формы достаточно определить коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы и коэффициенты желаемого характеристического уравнения.

Из (6)

$$\tilde{k}_i = \tilde{a}_i - C_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

От \tilde{k}_i перейдем к реальным k

$$k = \tilde{k} T_2. \quad (8)$$

Итак: **Алгоритм синтеза модальным методом.**

1. По дифференциальным уравнениям объекта находится характеристическое уравнение.
2. По заданным показателям качества определяется желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы.
3. Выбирается управляющее воздействие в виде обратной связи по состоянию в виде $u = kx$.
4. Вычисляется матрица преобразования T_2 .
5. По уравнению (7) $\tilde{k}_i = \tilde{a}_i - C_i$, $i = \overline{1, n}$ вычисляются коэффициенты преобразованной матрицы регулятора.
6. Определяются элементы матрицы коэффициента регулятора по выражению (8) $k = \tilde{k} T_2$.

Пример:

Рассмотрим тот же пример, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad k = ?$$

1. Характеристическое уравнение объекта $\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$.

2. Пусть $\lambda_1^* = -1$; $\lambda_2^* = -2$.

Желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

3. Выбираем управляющее воздействие $u = kx = k_1x_1 + k_2x_2$.

4. Вычисляем матрицу $T_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix}$.

5. $\tilde{k}_1 = \tilde{a}_1 - C_1 = 7 - 2 = 5,$

$\tilde{k}_2 = \tilde{a}_2 - C_2 = -6 - 3 = -9.$

6. $k = [k_1 \quad k_2] = \tilde{k}T_2 = [5 \quad -9] \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{17} & -\frac{89}{17} \end{bmatrix}.$

Статический расчет системы

Кроме требований к динамике в замкнутой САУ требуется обеспечить заданные статические свойства. В частности, требуется, чтобы по окончании ПП выходная координата соответствовала бы заданной, т.е. необходимо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v, \quad (1')$$

где v – заданное значение выходной координаты.

Управляющее воздействие имеет вид:

$$u = kx + Dv, \quad (u, v) \in R^m, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

D – квадратная матрица $\dim D = m \times m$.

Полагаем, что элементы матрицы k уже определены предыдущим алгоритмом синтеза модальным методом. Определим матрицу D из условия статики:

$$\begin{cases} \mathcal{X} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ u = kx + Dv. \end{cases} \quad (2)$$

В статике $\mathcal{X} = 0$, $x \in R^n$. Т.к. $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned} 0 = Ax^0 + Bu &\Rightarrow x^0 = -A^{-1}Bu \Rightarrow x^0 = -A^{-1}B(kx^0 + Dv) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^0 = (I + A^{-1}Bk)^{-1}(-A^{-1}BDv) \Rightarrow y^0 = Cx^0 = C(I + A^{-1}Bk)^{-1}(-A^{-1}BDv). \end{aligned} \quad (3)$$

Т.к. рассматривается условие (1'), то можно записать

$$I = -C(I + A^{-1}Bk)^{-1}A^{-1}BD. \quad (4)$$

Из выражения (4) определяется требуемая матрица D .

Структурная схема реализуемой системы (рис.112)

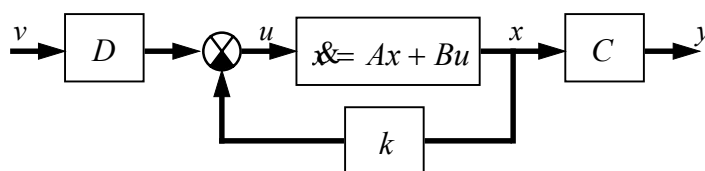


Рис.112

В данной структуре обеспечены заданные статические и динамические свойства системы.

Учет возмущений

На реальную САУ в процессе работы влияют внешние возмущения. Их действие должно быть сведено до минимума выбором параметров регулятора. В противном случае поведение замкнутой системы будет сильно отличаться от желаемого.

Рассмотрим, как нужно уменьшить влияние возмущений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + F(t), \\ y = Cx, \\ u = kx + Dv, \end{cases} \quad (1)$$

$$(v, u, y) \in R^m, x \in R^n, F \in R^l$$

Рассмотрим статический режим, когда $\dot{x} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= Ax^0 + Bu + F(t) \Rightarrow x^0 = -A^{-1}(Bu + F) \Rightarrow x^0 = -A^{-1}(Bkx^0 + BDv + F) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^0 = (I + A^{-1}Bk)^{-1}(-A^{-1}BDv) + (I + A^{-1}Bk)^{-1}(-A^{-1})F \Rightarrow y^0 = Cx^0 = \\ &= -C(I + A^{-1}Bk)^{-1}A^{-1}BDv - C(I + A^{-1}Bk)^{-1}A^{-1}F. \end{aligned} \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что матрица D во второе слагаемое не входит, в нем присутствует только матрица коэффициентов регулятора k . Следовательно, уменьшить влияние возмущений на выходные координаты можно только с помощью коэффициентов матрицы k , а они рассчитаны из условий требуемых динамических свойств.

Статическая ошибка из (2)

$$\varepsilon = y_0 - v = -C(I + A^{-1}Bk)^{-1}A^{-1}F. \quad (3)$$

При построении системы всегда требуется, чтобы $\varepsilon \leq \varepsilon_{зад.}$, т.е. должно выполняться

$$-C(I + A^{-1}Bk)^{-1}A^{-1}F \leq \varepsilon_{зад.} \quad (4)$$

При рассчитанных значениях матрицы коэффициентов k проверяется, выполняется ли условие (4), если оно не выполняется, то необходимо изменять k , следовательно меняется и требуемое распределение корней.

В этом случае необходимо находить компромиссное решение при расчете элементов матрицы k .

В общем случае для многосвязных систем матрица k имеет размерность $\dim k = m \times n$, поэтому n элементов матрицы k рассчитываются из условия обеспечения заданных динамических свойств, а оставшиеся m элементов позволят обеспечить определенную ошибку в статическом режиме.

Определение коэффициента усиления разомкнутой САУ скалярной системы

При заданном объекте управления, вначале определяется нужна ли замкнутая САУ, чтобы обеспечить требуемую точность (ошибку) $\varepsilon\%$ в статике для всего заданного диапазона изменения

выходной координаты $D = \frac{x_{\max}}{x_{\min}}$.

$\varepsilon_0\%$ – ошибка объекта управления по возмущению.

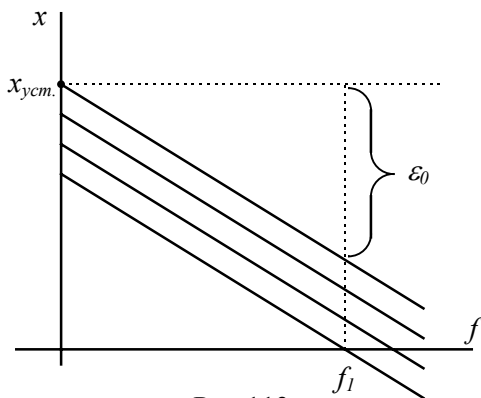


Рис.113

$$\varepsilon_0 \% = \frac{\varepsilon_0}{x_{уст.}} \cdot 100\%$$

1. Если $\varepsilon \% > \varepsilon_0 \%$, то объект в разомкнутом состоянии обеспечивает заданную ошибку $\varepsilon \%$.

2. Если $\varepsilon \% < \varepsilon_0 \%$, то необходимо иметь замкнутую систему, причем

$$\varepsilon \% = \frac{\varepsilon_0 \%}{1 + k_p}, \quad \text{откуда}$$

$$k_p = \frac{\varepsilon_0 \%}{\varepsilon \%} - 1. \quad (1)$$

Т.к. при уменьшении величины x , относительная ошибка возрастает, то требуемый коэффициент усиления разомкнутой системы обычно определяется для x_{\min} , тогда

$$\varepsilon \% = \frac{\varepsilon_0 \% \cdot D}{1 + k_p}, \quad k_p = \frac{\varepsilon_0 \% \cdot D}{\varepsilon \%} - 1. \quad (2)$$

Если k_p удовлетворяет выражению (2) (а практически берут с запасом), то на всем диапазоне изменения x будет поддерживаться выходная координата с точностью $\varepsilon \%$.

Следовательно: при известном коэффициенте усиления (передачи) объекта – k_0 необходимо, чтобы $k_p = k_0 k_y$. Отсюда определяется коэффициент усиления УУ.

$$k_y = \frac{k_p}{k_0}.$$

Для астатических (следающих) систем определяется требуемый коэффициент усиления по заданной скоростной ошибке

$$\varepsilon_{ск} = \frac{\Omega}{k_p},$$

Ω – скорость изменения входного сигнала $\Omega = 1$ рад/сек, тогда

$$k_p = \frac{1}{\varepsilon_{ск}}.$$

Далее определяются динамические свойства системы (если система неустойчива или при устойчивой системе получается неудовлетворительное качество) необходимо синтезировать корректирующее устройство.

Частотный метод синтеза

Этот метод активно развивался, начиная с 50-х годов. Он применяется, в основном, как графический и не позволяет получить точных оценок показателей качества, но является достаточно простым методом синтеза. Метод применяется, в основном, для синтеза линейных скалярных систем и иногда эффективно применяется для расчета нелинейных систем.

Для данного метода необходимо:

1. Задать математическую модель объекта в виде передаточных функций и от них перейти к частотным характеристикам.
2. Задать по заданным показателям качества желаемые частотные характеристики.

3. Задать структуру регулятора в виде корректирующего звена с помощью передаточных функций или частотных характеристик.

Существует два метода:

1. Последовательная коррекция.
2. Параллельная коррекция.

1. Последовательная коррекция.

Имеем исходную систему (рис.114)

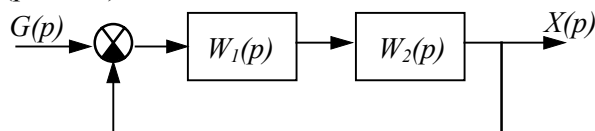


Рис.114

Если исходная система неустойчива или не удовлетворяет заданным показателям качества ПП, то её необходимо скорректировать. Применяем последовательную коррекцию с пока неизвестной ПФ $W_K(p)$ (рис.115)

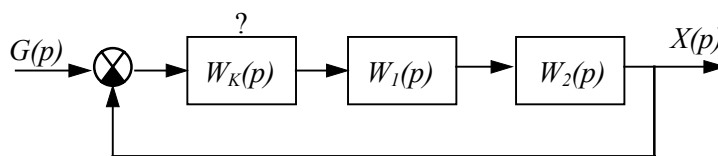


Рис.115

Требуется определить ПФ $W_K(p)$, а затем и физические элементы, ей соответствующие.

Для этого: По известным показателям качества регулирования определяется желаемая передаточная (частотная) характеристика разомкнутой системы $W^*(p)$, тогда

$$W_p(p) = W_K(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p) = W^*(p)$$

откуда

$$W_K(p) = \frac{W^*(p)}{W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (1)$$

От (1) перейдем к частотным характеристикам в логарифмическом масштабе. Для этого прологарифмируем (1) при $p \rightarrow j\omega$

$$20 \lg |W_K| = 20 \lg |W^*| - 20 \lg |W_1 W_2|. \quad (2)$$

График вычисления последовательного корректирующего устройства по частотным характеристикам в обычном масштабе (рис.116)

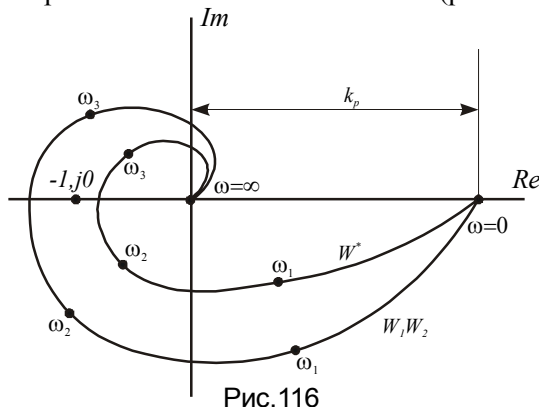


Рис.116

$$\begin{cases} A_K(\omega_i) = \frac{A^*(\omega_i)}{A_1(\omega_i)A_2(\omega_i)}, \\ \varphi_K(\omega_i) = \varphi^*(\omega_i) - \varphi_1(\omega_i) - \varphi_2(\omega_i). \end{cases}$$

График вычисления последовательного корректирующего устройства по частотным характеристикам в логарифмическом масштабе по выражению (2) (рис.117)

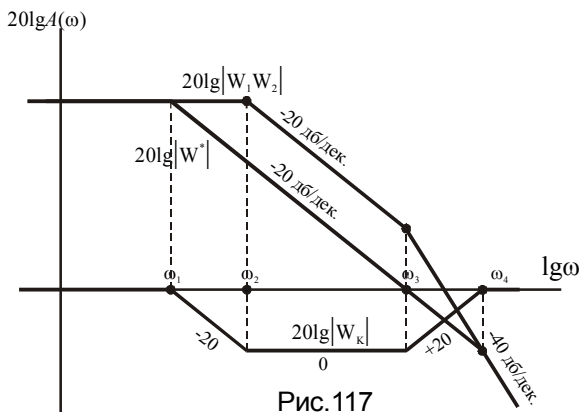


Рис.117

По полученному виду ЛАХ $20\lg|W_K|$ по таблицам стандартных фильтров (RC-цепочек) (табл. 2 на стр.83), определяется соответствующая схема корректирующего устройства, параметры сопротивлений и емкостей зависят от численных значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

$$W_K(p) = \frac{(T_2p + 1)(T_3p + 1)}{(T_1p + 1)(T_4p + 1)},$$

где $T_1 = \frac{1}{\omega_1}, T_2 = \frac{1}{\omega_2}, T_3 = \frac{1}{\omega_3}, T_4 = \frac{1}{\omega_4}$.

Недостатки последовательной коррекции:

1. В некоторых САУ невозможно разорвать главный контур регулирования, следовательно, невозможно включить последовательную коррекцию.
2. Низкая помехозащищенность, т.к. корректирующие звенья в основном дифференцирующие, то в них возрастают высокочастотные помехи.

Эти недостатки отсутствуют у параллельной коррекции.

2. Параллельная коррекция.

Рекомендации по месту включения корректирующего звена:

- 2.1. Необходимо охватывать звенья с наибольшим коэффициентом усиления.
- 2.2. Не рекомендуется охватывать много инерционных звеньев, т.к. сам контур может оказаться неустойчивым (если все же по условиям приходится охватывать инерционные звенья, тогда внутренний контур по любому критерию необходимо проверить на устойчивость).

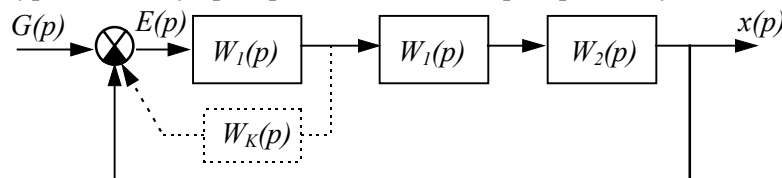


Рис.118

Как и при последовательной коррекции по заданным показателям качества определяется $W^*(p)$ разомкнутой системы, тогда

$$W_p(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_K(p)} \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = W^*(p), \quad (1)$$

обозначив $W_1W_2W_3 = W_H$ – ПФ нескорректированной разомкнутой системы и решая относительно W_K , получим

$$W_K(p) = \frac{W_H(p) - W^*(p)}{W_1(p)W^*(p)}. \quad (2)$$

Уравнение (2) является исходным для определения ПФ параллельного корректирующего звена.

Если коэффициент усиления разомкнутой системы достаточно большой (большинство реальных систем), то синтез параллельного корректирующего звена ведут по "вырожденным структурам".

Параллельная коррекция по вырожденной структуре

Заменяя в (1) $p = j\omega$, получим частотные характеристики

$$W^*(j\omega) = \frac{W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)W_K(j\omega)}. \quad (3)$$

В области частот работы системы (область средних и высоких частот) $W_1(j\omega) \cdot W_K(j\omega) \gg 1$, поэтому

1.		$K(p) = k,$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$	
2.		$K(p) = \frac{Tp}{Tp + 1},$ $T = RC.$	
3.		$K(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1},$ $T_1 = R_1 C,$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1,$ $T_2 = k T_1.$	
4.		$K(p) = \frac{1}{Tp + 1},$ $T = RC.$	
5.		$K(p) = \frac{k}{Tp + 1},$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$ $T = C \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$	
6.		$K(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2; T_3 T_4 = T_1 T_2,$ $T_3 + T_4 = T_1 + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right).$	
7.		$K(p) = \frac{Tp}{(T_1 + T_2)p + 1},$ $T_1 = \frac{L_1}{R_1}, T_2 = \frac{L_2}{R_2},$ $T = \frac{M}{R_1}, M = \frac{\omega_1 \omega_2}{R_M}.$	
8.		$K(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + R_1 C_1)p + 1},$ $T_2 = R_1 C_1; T_1 = R_2 C_2.$	

9.		$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_1 + R_1 C_2) p + 1}$ $T_2 = R_1 C_1, \quad T_1 = R_2 C_2.$	
10.		$K(p) = k_{Т.Г.}$	
11.		$K(p) \approx \frac{1}{Tp} + 1,$ $T = RC.$	
12.		$K(p) \approx Tp + 1,$ $T = RC.$	

$$W_K(j\omega) = \frac{W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega)}{W^*(j\omega)}. \quad (4)$$

В логарифмическом масштабе

$$20 \lg |W_K| = 20 \lg |W_2 W_3| - 20 \lg |W^*|. \quad (5)$$

Итак. При параллельной коррекции по вырожденным структурам для определения ЛАХ корректирующего звена, необходимо из ЛАХ звеньев, не охваченных коррекцией, вычесть ЛАХ желаемую.

Имея ЛАХ корректирующего звена по таблицам (табл. 2) выбирается схема корректирующего устройства и параметры RC элементов (табл. 2).

После чего, с учетом W_K , строится (обязательно) скорректированная ЛАХ, которая, в общем случае, не совпадает с желаемой на низких частотах, где $W_1 W_K \ll 1$. Только после этого можно переходить к построению переходного процесса.

Пересчет последовательной коррекции в параллельную

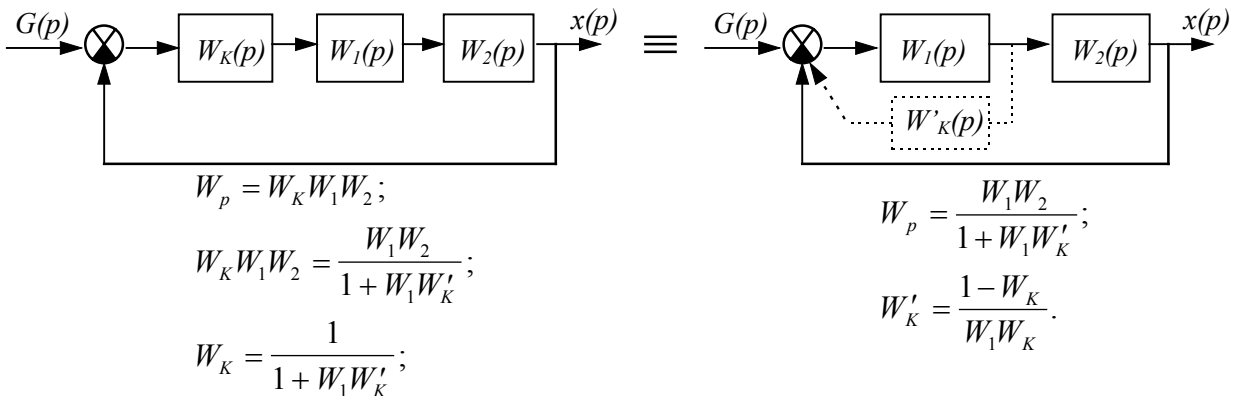


Рис.119

Следует, однако, заметить, что при таком формальном пересчете ПФ параллельного корректирующего звена может быть нереализуемой, т.е. порядок знаменателя меньше порядка числителя.

Построение желаемой частотной характеристики

Определение: Минимально-фазовой (МФ) системой (звеном) называется система (звено), у которой все полюсы и нули ПФ имеют отрицательные или равные нулю вещественные части.

Свое название МФ системы получили из-за того, что они дают минимальный фазовый сдвиг φ по сравнению с другими звеньями, имеющими такую же амплитудно-частотную характеристику $A(\omega)$.

$$(1. W_1 = \frac{k}{Tp + 1} - \text{МФ}; 2. W_2 = \frac{k}{Tp - 1} - \text{не МФ})$$

У МФ систем, таким образом, существует однозначная зависимость между амплитудой и фазой, поэтому для таких систем достаточно строить лишь АЧХ.

Желаемая ЛАХ разомкнутой системы строится исходя из требований к системе по показателям качества: требуемый k_p , допустимое время ПП, запас устойчивости по фазе (величина перерегулирования).

ЛАХ может быть условно разделена на три части (рис.120):

- низкочастотная;
- среднечастотная;
- высокочастотная.

1. Низкочастотная часть ЛАХ для:

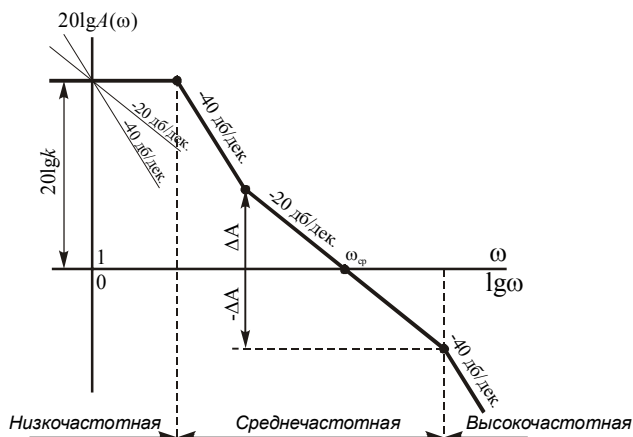


Рис.120

перерегулирования $\sigma\%$.

Установлено, что при частоте среза наклон желаемой ЛАХ должен быть -20 дБ/дек (устойчивость, вид пп), а частота среза ω_{cp} определяется по t_p и $\sigma\%$ из следующего соотношения: $\omega_{cp} \approx \frac{k\pi}{t_p}$,

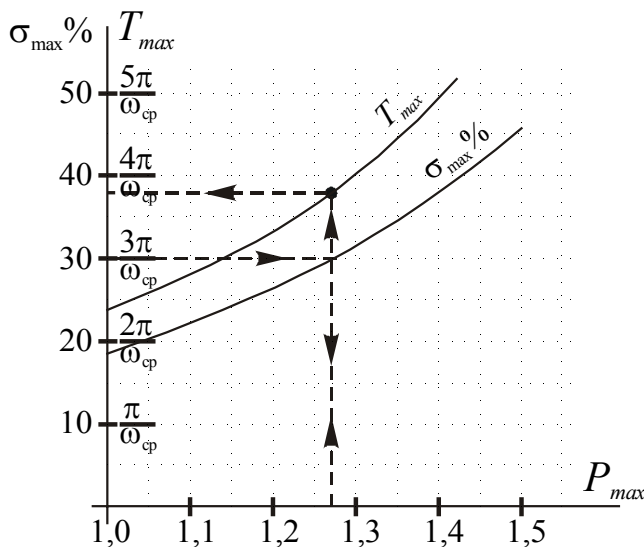


Рис.121

1.1. статических систем имеет горизонтальный участок до первой точки сопряжения и отстоит от оси частот на величину $20 \lg k_p$, и, таким образом, определяет собой точность работы системы в установившемся режиме.

1.2. астатических систем с порядком астатизма γ наклон низкочастотного участка ЛАХ определяется величиной 20γ дБ/дек и проходит через точку $\omega = 1; 20 \lg k_p$ (рис.120).

2. Среднечастотная часть ЛАХ определяет, в основном, качество ПП системы. Причем, участок ЛАХ, пересекающий ось частот, выбирается по заданному времени ПП – t_p и по величине

где коэффициент k определяется допустимой величиной перерегулирования.

Для определения ω_{cp} по заданным t_p и $\sigma\%$ в литературе построены графики $\sigma_{max}\% = f(P_{max})$ и $T_{max} = f(P_{max})$ (рис.121).

Пример:

Задано $t_p = 0,5$ с. и $\sigma\% = 30\%$.

По оси $\sigma_{max}\%$ откладываем 30% и по кривой $\sigma_{max}\%$ определяется $P_{max} = 1,28$ далее по кривой

$$T_{max} = \frac{3,8\pi}{\omega_{cp}}, \quad \text{где } T_{max} = t_p, \quad \text{следовательно}$$

$$\omega_{cp} = \frac{3,8\pi}{0,5} = 23,6 \text{ 1/сек.}$$

Длина отрезка с наклоном -20 дБ/дек при ω_{cp}

ограничивается условиями необходимого запаса по фазе в ° и по модулю в децибелах. Для этого используется номограмма (рис.106) постоянных значений P на плоскости ЛЧХ (иллюстрация на рис.122).

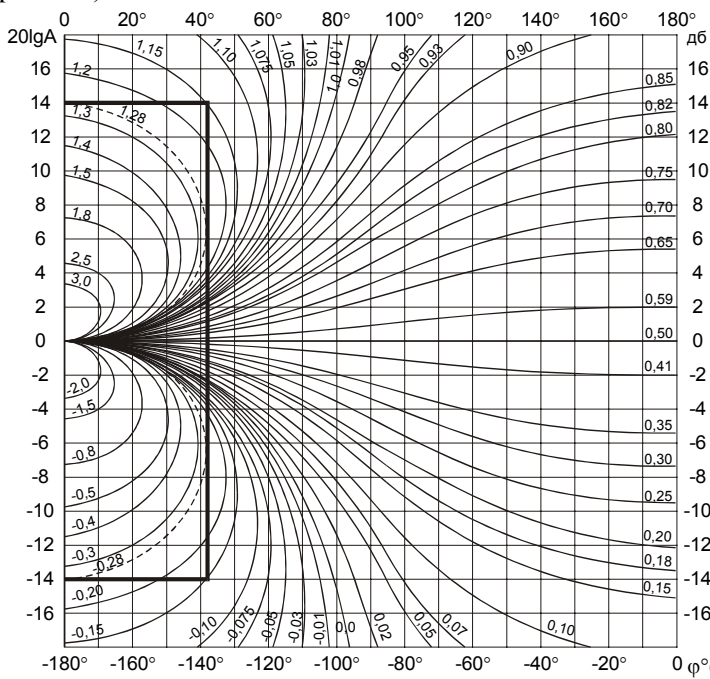


Рис.122

По значению P_{max} из предыдущего графика, определяемому для заданного $\sigma\%$, находим P_{min} :

$$P_{min} = 1 - P_{max} = -0,28.$$

На номограмме P (рис.122) строится прямоугольник, определяемый касательными линиями к линиям P_{max} и P_{min} (прямая линия).

По оси ординат отсчитываем запас по модулю в децибелах, а по оси абсцисс запас по фазе $\Delta\varphi$ в °

$$\Delta A = 14 \text{ дб}; \quad \Delta\varphi = 40^\circ.$$

Следовательно отрезок ЛАХ с наклоном -20дб/дек ограничивается величинами $\pm \Delta A$.

Имея низкочастотный участок и среднечастотный с наклоном -20дб/дек надо провести их сопряжение. Рекомендуется, чтобы участок сопряжения из одного

отрезка в другой производился так, чтобы наклон предыдущего отличался от наклона соседнего участка на -20дб/дек (для упрощения корректирующего устройства) (рис.120).

3. Высокочастотная часть желаемой ЛАХ выбирается по возможности аналогичной ЛАХ неоткорректированной системы, т.к. высокие частоты соответствуют малым постоянным времени системы, которые не оказывают заметного влияния на вид ПП (рис.120).

Исследование САУ со звеном чистого запаздывания

Звеном с чистым запаздыванием называют такое звено, у которого выходная величина повторяет все изменения входной величины с постоянным сдвигом по времени.

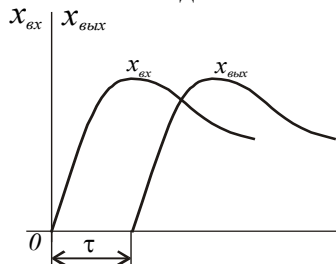


Рис.123

τ – время чистого запаздывания.

$$\text{Уравнение такого звена имеет вид: } x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (1)$$

где $x_{\text{вх}}(t)$ – любая функция времени.

Звено с чистым запаздыванием является линейным звеном, однако его ПФ трансцендентна

$$W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = e^{-p\tau} \quad (1)$$

Амплитудно-фазовая характеристика при $p = j\omega$

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau, \quad (2)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau} = 1, \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{\sin \omega\tau}{\cos \omega\tau}\right) = \arctg(-\text{tg} \omega\tau) = -\omega\tau, \quad (3)$$

Следовательно в логарифмическом масштабе:

ЛАХ: $20 \lg A(\omega) = 20 \lg 1 = 0$ – ЛАХ совпадает с осью абсцисс.

ЛФХ: $\varphi(\omega) = -\omega\tau$.

При исследовании систем с чистым запаздыванием необходимо учитывать, что характеристическое уравнение такой системы трансцендентно и имеет бесчисленное множество корней. Поэтому алгебраические критерии Рауса и Гурвица не могут быть непосредственно использованы. Специальные

критерии устойчивости для данных систем разработаны Понтрягиным Л.С., Чеботаревым Н.Г., Мейманом Н.Н.

Однако для практического использования во многих случаях более удобными оказываются частотные критерии Михайлова, Найквиста и Д-разбиения.

Критерий Михайлова: Для того, чтобы линейная система со звеном чистого запаздывания была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова $M(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ , нигде не обращаясь в нуль, повернулся вокруг начала координат в положительном направлении на угол $\frac{\pi n}{2}$ (где n - порядок характеристического уравнения), т.е. последовательно прошел через n квадрантов комплексной плоскости $M(j\omega)$.

Критерий Найквиста: Для того, чтобы замкнутая система со звеном чистого запаздывания была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W_p(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся бы $\frac{k}{2}$ раз в положительном направлении вокруг точки $-1; j0$ (где k - число правых корней разомкнутой системы).

Таким образом, частотные критерии для систем, включающих звенья чистого запаздывания, оказываются совершенно такими же по форме, как и для обыкновенных линейных систем.

Звено чистого запаздывания не является минимально-фазовым звеном.

Оценка состояния линейных динамических систем

В модальном методе синтеза мы предполагали, что можно измерить все компоненты вектора состояния x . В общем случае в реальных системах сделать это невозможно. Как правило, в нашем распоряжении находятся компоненты входного вектора u , а иногда и отдельные компоненты вектора состояния x .

Для обеспечения обратной связи по состоянию необходимо каким-либо образом по измеряемым координатам u восстановить вектор состояния x .

- Определения:
1. Оценкой вектора состояния x называется такая величина \hat{x} , которая после допустимого интервала времени становится с определенной точностью близкой x .
 2. Асимптотической оценкой вектора состояния называется величина x , если $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x$.
 3. Специальную динамическую систему, которая вырабатывает оценку \hat{x} будем называть фильтром оценки состояния.

Разработаны: дифференцирующий фильтр, фильтр Винера-Калмана, фильтр Люенбергера и др.

Одним из способов восстановления вектора состояния x является непосредственное вычисление координат состояния.

Способ прямого вычисления вектора состояния

Уравнения динамической линейной системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, (u, y) \in R^m, \\ y = Cx, & m < n. \end{cases} \quad (1)$$

Матрица C имеет полный ранг: $\text{rang} C = m$.

Пусть кроме вектора выходных координат y доступны измерению некоторые компоненты вектора состояния x .

Тогда разобьем вектор x на две группы

$$x_1 \in R^{n-m} \text{ и } x_2 \in R^m.$$

Из второго уравнения (1) можно записать:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad (2)$$

причем координаты вектора x_2 подбираются таким образом, чтобы матрица C_2 была невырожденной, т.е. $\det C_2 \neq 0$.

Тогда из (2) можно выразить x_2

$$x_2 = C_2^{-1}(y - C_1 x_1). \quad (3)$$

Выражение (3) показывает, что если выходной вектор y измерим и можно измерить $(n - m)$ координат состояния x , то оставшиеся m координат вектора x вычисляются из (3).

Для увеличения возможности непосредственного вычисления можно использовать метод расширения исходной системы путем дифференцирования известного вектора y

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu. \quad (4)$$

Получим еще m уравнений для вычисления m координат вектора x .

Продолжая расширять систему, можно набрать столько уравнений, сколько потребуется для вычисления всех компонент вектора состояния x . Следует, однако, помнить, что при этом необходимо реализовать операцию дифференцирования вектора y .

Условие наблюдаемости

Понятие наблюдаемости позволяет ответить на вопрос "всегда ли можно восстановить вектор x по измеряемому вектору y ?".

Динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ M \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ имеет полный ранг, равный } n.$$

Если матрица N не имеет полного ранга, то нельзя полностью восстановить вектор x и система является не полностью наблюдаемой.

ЛИНЕЙНЫЕ САУ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ранее нами изучены линейные САУ при совершенно определенных, детерминированных воздействиях, которые описываются заданной функцией времени.

Однако такие воздействия далеко не исчерпывают все возможные условия работы САУ. Во многих случаях воздействия нельзя определить наперед известной функцией времени. Они могут принимать самые разнообразные случайные значения. В таких случаях оценивается только вероятность появления воздействия в тот или иной момент времени.

Исследование поведения САУ под влиянием случайных воздействий осуществляется методами теории случайных функций и называется статистической динамикой автоматических систем. Статистический расчет в САУ ведется в тех случаях, когда период изменения случайной функции соизмерим с временем регулирования системы. Он состоит из следующих основных разделов:

1. Определение средних характеристик сигналов;
2. Оценка качества САУ при случайных воздействиях;
3. Расчет оптимальной системы на основе полученных результатов о сигналах и качестве систем

Характеристики случайных функций

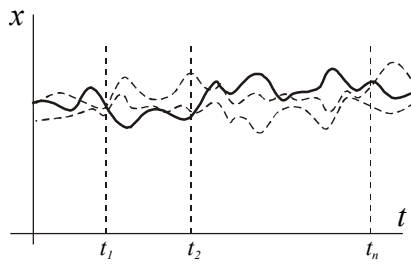


Рис.124

Процесс, описываемый случайными функциями называется случайным процессом. Случайной функцией $x(t)$ называется такая функция, значение которой при любом заданном t является случайной величиной. Случайная функция, полученная в результате опыта, называется реализацией случайной функции и является определенной, неслучайной.

Таким образом, случайная функция представляет собой совокупность множества реализаций (рис.124).

Задачей статистического метода является изучение не каждой из функций $x_k(t)$, характеризующую случайный процесс, а изучение свойств всего множества в целом, при помощи усреднения свойств входящих в этот процесс функций.

Характер протекания случайного процесса оценивается его вероятностными характеристиками.

1. Одной из важнейших характеристик случайного процесса является функция распределения вероятности $F(x)$.

Так в момент времени $t = t_1$ (рис.124) значения отдельных реализаций $x_1(t_1), K, x_2(t_1), K,$ и т.д. будут различны. Вероятность того, что эти значения не будут больше некоторой величины x_1 и является функцией распределения вероятности.

$$F_1(x, t_1) = P[x(t_1) \leq x_1]. \quad (1)$$

Пример: Экспериментальное определение функции распределения вероятности.

Сделано 10 опытов. Пусть наблюдаемые значения x_i в 10 системах в момент времени $t = t_1$ оказались следующими:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,2	0,4	0,3	0,6	0,7	0,9	0,3	0,4	0,5	0,4
$F(x)$	0,1	0,6	0,3	0,8	0,9	1,0	0,3	0,6	0,7	0,6

Найдем вероятность того, что x_i будет не больше $x = 0,5$. Число событий удовлетворяющих неравенству $x_i \leq 0,5$ равно $i = 7$, всего опытов 10, следовательно $F_1(0,5; t_1) \approx \frac{7}{10} = 0,7$.

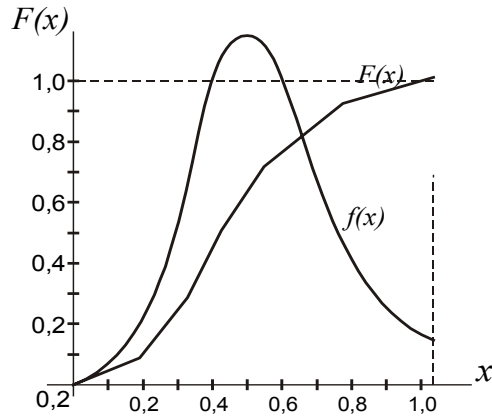


Рис.125

Вычислим $F(x)$ для разных значений x_i (табл.). Видим, что $F(x) \rightarrow 0$ при убывании x , $F(x) \rightarrow 1$ при возрастании x .

Если функция $F(x)$ имеет производную, то величина

$$f_1(x, t_1) = \frac{dF(x, t_1)}{dx} \quad (2)$$

называется одномерной плотностью вероятности.

Величина $f_1(x, t_1)dx_1 = P[x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1]$ представляет собой вероятность того, что случайная функция $x(t)$ в момент времени $t = t_1$ имеет значение в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$.

Аналогично рассмотренному вводятся понятия о n -мерной функции распределения $F_n(x_1, K, x_n, t_1, K, t_n)$ и n -мерной плотности вероятности

$$f_n(x_1, K, x_n, t_1, K, t_n) = \frac{d^n F_n(x_1, K, x_n, t_1, K, t_n)}{dx_1 K dx_n}. \quad (3)$$

Для ТАУ важное значение имеет также другое разделение случайных процессов – на стационарные и нестационарные.

Стационарный случайный процесс – это аналог установившегося процесса в детерминированной системе. Статистический характер стационарного процесса неизменен во времени. В них функции распределения и плотности вероятности всех процессов не зависят от времени.

$$\begin{aligned} F_n(x_1, K, x_n, t_1, K, t_n) &= F_n(x_1, K, x_n, t_1 + \tau, K, t_n + \tau); \\ f_n(x_1, K, x_n, t_1, K, t_n) &= f_n(x_1, K, x_n, t_1 + \tau, K, t_n + \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

В практике исследования САУ широкое распространение получили более простые, но менее полные характеристики случайных функций: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и спектральная плотность.

1. Математическое ожидание. Математическим ожиданием случайной функции называют величину.

$$m_x(t) = M\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_1(x, t) dx. \quad (5)$$

Кривая $m_x(t)$ является некоторой средней кривой, относительно которой колеблются значения реализаций случайной функции.

Для стационарной случайной функции математическое ожидание $m_x(t) = const$.

2. Дисперсия. Дисперсия случайной функции определяется выражением

$$\sigma = M\{x(t) - m_x(t)\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f_1(x, t) dx. \quad (6)$$

Она равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной функции от её среднего значения. Дисперсия – есть усредненная мера отклонения случайной функции от ее математического ожидания. Для стационарной случайной функции дисперсия $\sigma = const$. Дисперсия регулярной функции $\sigma = 0$.

Среди законов распределения случайных величин особый интерес представляет нормальное или Гауссово распределение, которое встречается в большинстве практических задач. Плотность вероятности его

$$f_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (7)$$

Функция распределения $F(x)$ для нормального закона получается путем интегрирования выражения (7).

Кроме того, в теории случайных процессов пользуются двумя понятиями средних значений.

1. Среднее по множеству (математического ожидания), определены на основании наблюдения за множеством однотипных систем, находящихся в однотипных условиях.

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_1(x, t) dx. \quad (8)$$

2. Среднее по времени, определенные на основании наблюдения за одной системой на протяжении достаточно длительного времени T

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dx. \quad (9)$$

Вообще, для случайных процессов $\tilde{x} \neq \bar{x}$.

Одним из замечательных свойств стационарных процессов является $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t)$ – эргодическая гипотеза. и эргодическая теорема.

Физический смысл эргодической гипотезы (теоремы) имеет большое практическое значение, т.к. она позволяет заменить труднодоступное одновременное наблюдение за множеством систем длительным наблюдением за одной системой.

3. Корреляционные функции. Для характеристики степени изменчивости случайного процесса при изменениях t вводится понятие корреляционной или автокорреляционной функции случайного процесса.

Корреляционная функция связывает между собой отклонения случайной функции от её математического ожидания при двух значениях аргумента t_1 и t_2 . Она равна математическому ожиданию этих отклонений.

$$R_x(t_1, t_2) = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)] \} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)] f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (10)$$

Для стационарного процесса корреляционная функция зависит только от одной переменной $\tau = t_1 - t_2$ – разности двух моментов времени.

Выражение корреляционной функции (10) – есть среднее по множеству. Однако, для случайных процессов для которых применима эргодическая гипотеза, корреляционная функция может быть определена как среднее по времени

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x(t)] [x(t + \tau) - m_x(t + \tau)] dt \quad (11)$$

или

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt. \quad (12)$$

Последнее выражение корреляционной функции (12), записанное для случайных процессов, мы и будем преимущественно использовать в дальнейшем.

Основные свойства корреляционных функций:

1. Начальное значение корреляционной функции при $\tau = 0$ равно среднему значению квадрата случайной функции $\bar{x}^2(t)$, т.е. является положительной величиной.

2. Корреляционная функция (12) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. При малых τ , значения $x(t)$ и $x(t + \tau)$ более тесно связаны друг с другом, чем при больших τ , т.е. вероятность того, что они будут мало отличаться друг от друга, будет больше при малых τ . При больших τ вероятность получить положительные произведения под интегралом (12) (рис.125) приближается к вероятности получить отрицательные произведения, поэтому с $\tau \rightarrow \infty$ сумма таких произведений $\rightarrow 0$.

3. Значение корреляционной функции при $\tau \neq 0$ не может быть больше её начального значения $\bar{x}^2(t) = R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$.

4. Корреляционная функция есть функция четная (рис.127)

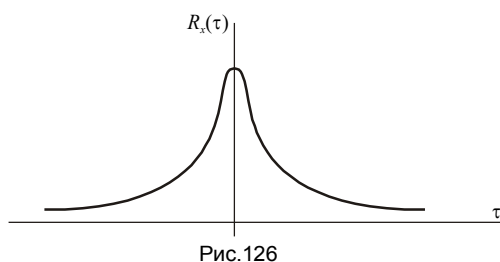


Рис.126

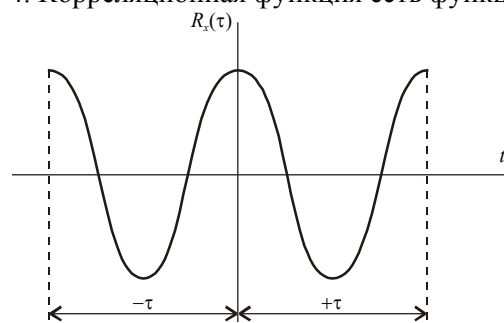


Рис.127

$$R_x(\tau) = \overline{x(t + \tau)x(t)} = \overline{x(t)x(t - \tau)} = R_x(-\tau).$$

5. Если случайная функция содержит постоянную составляющую a_0 , то корреляционная функция (12)

содержит постоянную составляющую a_0^2 .

6. Если случайная функция содержит периодическую составляющую, то корреляционная функция также содержит периодическую составляющую той же частоты.

Пример: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ – детерминированная функция.

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t - \omega \tau + \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t - \omega \tau + 2\varphi)] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau. \quad (13)$$

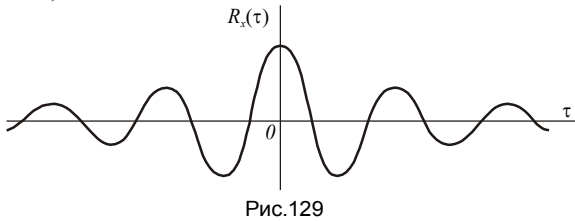
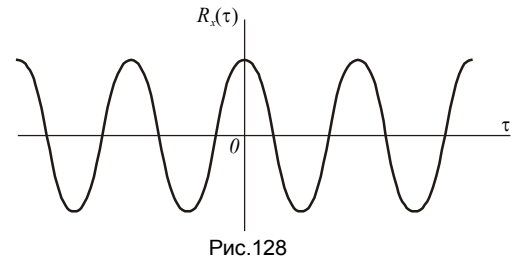
Для оценки связи двух случайных процессов, вводится понятие взаимной корреляционной функции

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau)dt. \quad (14)$$

Таким образом, корреляционная функция не зависит от сдвига фазы и есть косинусоида (рис.128).

Случайный процесс без периодической составляющей имеет корреляционную функцию (рис.126).

Случайная функция, содержащая в своем составе периодическую составляющую, имеет корреляционную функцию (рис.129).



Спектральная плотность

Спектральной плотностью называется выражение

$$S_T(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} M[X_T(j\omega)X_T(-j\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} M[|A_T(j\omega)|^2], \quad (1)$$

где $X_T(j\omega) = \int_{-T}^{+T} x(t)e^{-j\omega t} dt$ – изображение Фурье для случайной функции $x(t)$ на интервале $-T, T$. Термин ”спектральная плотность” обязан своим происхождением теории электрических колебаний.

Пусть $x(t)$ – напряжение на сопротивлении в 1ом. Тогда величина

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t)]^2 dt \text{ численно равна энергии выделяемой на этом сопротивлении в единицу времени.}$$

Аналогично предыдущему, вводится понятие и о взаимной спектральной плотности

$$S_{12}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} M[X_1(-j\omega)X_2(j\omega)], \quad (2)$$

где X_1, X_2 – изображение по Фурье от случайных функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответственно.

Установим связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями

$$S_{12}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4)$$

т.е. спектральная плотность (4) (взаимная спектральная плотность (3)) представляет собой изображение Фурье от корреляционной (взаимной) функции.

На основе теории интеграла Фурье можно найти и обратные соотношения

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (5)$$